Reifeprüfung April 1947

Mathematik

1a) Bestimme Wurzeln, Extremstellen, Wendepunkte und Steigung der Wendetangenten der Funktion $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$.

b) An welchen Stellen ist die Kurve $xy - 1 = 0$ am stärksten gekrümmt, und wo liegen die Krümmungsmittelpunkte für diese Stellen?

2) Zwei gerade Straßen bilden den rechten Winkel ABC, der ein Stoppelfeld einschließt. Ein Wanderer will möglichst schnell von A aus nach der Herberge in C und geht deshalb von A aus schräg übers Feld zur Straße BC und auf dieser weiter nach C. Unter welchem Winkel muß er von A abgehen, wenn sich seine Geschwindigkeit auf der Straße zu der über das Feld wie $2:\sqrt{3}$ verhält?

3) Die Gerade $y + 0{,}5x - 2 = 0$ geht durch den einen Brennpunkt einer Ellipse ($\epsilon = \frac{4}{5}$), deren Mittelpunkt der Koordinatenursprung ist und berührt eine Parabel (I Hauptlage),, deren Brennpunkt der obere Nebenscheitel der Ellipse ist.
Bestimme die Gleichungen der Kegelschnitte.

Beginn $8^{\underline{25}}$

Reinschrift

Reifeprüfung 1947.

Mathematik

[redacted]

Aufgaben:

1.) a.) Bestimme Wurzeln, Extremstellen, Wendepunkte und Steigung der Wendetangenten der Funktion $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$.

b.) An welchen Stellen ist die Kurve $xy - 1 = 0$ am stärksten gekrümmt und wo liegen die Krümmungsmittelpunkte für diese Stellen?

2.) Zwei gerade Straßen bilden den rechten Winkel A, B, C, der ein Stoppelfeld einschließt. Ein Wanderer will möglichst schnell von A aus nach der Herberge in C und geht deshalb von A aus schräg über's Feld zur Straße BC und auf dieser weiter nach C. Unter welchem Winkel muß er von A abgehen, wenn sich seine Geschwindigkeit auf der Straße zu der über das Feld wie $2 : \sqrt{3}$ verhält.

3.) Die Gerade $y + 0{,}5x - 2 = 0$ geht durch den einen Brennpunkt einer Ellipse ($\varepsilon = \frac{4}{5}$), deren Mittelpunkt der Koordinatenursprung ist und berührt eine Parabel (1. Hauptlage) deren Brennpunkt der obere Nebenscheitel der Ellipse ist. Bestimme die Gleichungen der Kegelschnitte!

1.) a.)

$y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$

$-a = 6 = x_1 + x_2 + x_3$

$6 = +2 + 2 + 2$

$-c = 8 = x_1 x_2 x_3$

$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$

Die 0-Stellen haben folgende Werte:

$x_1 = +2$

$x_2 = +2$

$x_3 = +2$

$x_4 = 0$ siehe Kor.

$y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$

$y' = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 8$

$y'' = 12x^2 - 36x + 24$

Die Extremstellen erhalte ich, indem ich die 1. Ableitung gleich 0 setze und die Wurzeln daraus errechne und diese dann in die 2. Ableitung einsetze.

$4x^3 - 18x^2 + 24x - 8 = 0 \quad | :4$

$x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x - \frac{4}{2} = 0$

$-a = +\frac{9}{2} = x_1 + x_2 + x_3 = 2 + 2 + \frac{1}{2}$

$-c = +\frac{4}{2} = x_1 x_2 x_3 = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}$

$x_1 = 2$

$x_2 = 2$

$x_3 = \frac{1}{2}$

$y'' = 12x^2 - 36x + 24$

$x = 2 \ldots \quad y'' = 48 - 72 + 24$

$\underline{y'' = 0}$

$x = \frac{1}{2} \ldots \quad y'' = \frac{12}{4} - \frac{36}{2} + 24$

$y'' = 3 - 18 + 24$

$\underline{y'' = 9}$ Min $\quad y'' > 0$

Für $x_3 = \frac{1}{2}$ 2 liegt hier ein Terassenpunkt vor

Um die Wendepunkte zu erhalten muß ich die 2. Ableitung gleich 0 setzen.

$12x^2 - 36x + 24 = 0$

$12x^2 - 36x = -24 \quad | :12$

$x^2 - 3x = -2 \quad | + \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{8}{4} + \frac{9}{4}$

$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$

$x - \frac{3}{2} = \pm \frac{1}{2}$

$x_{1/2} = \pm \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$

$\underline{\underline{x_1 = 2}}$

$\underline{\underline{x_2 = 1}}$

Die Steigung der Wendetangenten finde ich durch Einsetzen der ~~Abszissen~~ der Wendepunkte in die 1. Ableitung.

$m_1 = 32 - 72 + 48 - 8$; $m_2 = 4 - 18 + 24 - 8$

$\underline{\underline{m_1 = 0}}$ $\qquad$ $\underline{\underline{m_2 = +2}}$

1. b.)

Um die Stelle der stärksten Krümmung zu erhalten, muß man die Formel $\varrho = \frac{\sqrt{[1+(y')^2]^3}}{y''}$ anwenden und diese dann differenzieren.

$x \cdot y - 1 = 0$ $\qquad$ $y = \frac{1}{x}$

$x \cdot y = 1$ $\qquad$ $y' = -\frac{1}{x^2}$

$y = \frac{1}{x}$ $\qquad$ $y'' = \frac{2\,1}{\cancel{2}x^3}$

+

$$\varrho = \frac{\sqrt{[1+(y')^2]^3}}{y''}$$

$$\varrho = \frac{\sqrt{[1+(-\frac{1}{x^2})^2]^3}}{\cancel{y''}\ \frac{1}{2x^3}}$$

$$\varrho = \sqrt{[1+(-\frac{1}{x^2})^2]^3} \cdot 2x^3 = \min$$

$$\varrho' = \frac{3[1+(-\frac{1}{x^2})^2]^2 \cdot 2 \cdot (-\frac{1}{x^2}) \overset{\cdot \frac{2}{x^3}}{\cdot} \cancel{2x^3} + \overset{6x^2}{\cdot}\cancel{\sqrt{[1+(-\frac{1}{x^2})^2]^3}}}{\cancel{2\sqrt{[1+(-\frac{1}{x^2})^2]^3}}} = \overset{0}{\cancel{\min}}$$

/ + (+) s. K.

+

3.) $y + 0{,}5x - 2 = 0$

$y = -0{,}5x + 2$

$y = -\frac{1}{2}x + 2$

$-\frac{1}{2}x + 2 = 0$

$-\frac{1}{2}x = -2 \quad | : -\frac{1}{2}$

$x = 4 = e$

x ist zugleich auch e

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{e}{a} = \frac{4}{5}$

$a = \frac{e}{\frac{4}{5}}$

$a = \frac{\cancel{4} \cdot 5}{\cancel{4}}$

$\underline{a = 5}$

$\underline{b = 3}$

$a^2 - b^2 = e^2$

$a^2 - e^2 = b^2$

$25 - 16 = 9$

$b = 3.$

Die Gleichung der Ellipse lautet also:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Um die Gleichung der Parabel zu errechnen benötige ich $a = \frac{p}{2}$. Dieses a erhalte ich aus der Tangentenbedingung: $b = 3$, da der ~~Scheitel~~ Brennpunkt der Parabel im Nebenscheitel der Ellipse liegt. !

für a u. b hätte hier besser α u. β benutzt werden sollen +

$p = 2m(n + am - b) \quad \frac{p}{2} = a$

$2a = -1(2 \cancel{+} -\frac{1}{2}a - 3) \quad p = 2a$

$2a = -2 + \frac{1}{2}a + 3 \quad | : 2$

$a = -1 + \frac{1}{4}a + \frac{3}{2} \quad | -\frac{1}{4}a$

$\frac{3}{4}a = \frac{1}{2} \quad | : \frac{3}{4}$

$a = \frac{1 \cdot 4^2}{2 \cdot 3}$

s. o.

$\underline{a = \frac{2}{3}}$

$\underline{p = \frac{4}{3}}$

Da die Parabel aus dem Mittelpunkt verschoben ist, heißt die Gleichung: $(y - b)^2 = 2p(x - a)$

$\underline{(y - 3)^2 = \frac{8}{3}\left(x - \frac{2}{3}\right)}$

Aufg. 2) fehlt.

3 (genügend)

Geidy

Knopf

Ende 13^{25}